EPREUVE DE MATHEMATIQUE II

Option MP

Durée : 4 heures

PREMIER PROBLEME : Analyse

Rappels et notations

On note **N** l'ensemble des entiers naturels, **Z** l'ensemble des entiers relatifs et **R** celui des nombres réels.
Si f est une application de **R** dans **R** continue par morceaux et de période 2π, les coefficients de Fourier de f sont définis par :

$$\forall\, k \in \mathbf{Z},\ c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\, e^{-kiu}\, du$$

et la série de Fourier de f est la série de fonctions

$$\sum_{k\geq 0} u_k(x) \text{ où } u_k(x) = c_k(f)\, e^{ikx} + c_{-k}(f)\, e^{-ikx} \text{ si } k > 0 \text{ et } u_0(x) = c_0(f).$$

ln désigne la fonction logarithme népérien et e l'exponentielle de 1.
On rappelle que la fonction Γ est définie et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et qu'elle vérifie la relation fonctionnelle $\forall\, x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

On définit par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ une suite d'applications $\Psi_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

Ψ_0 est l'application constante égale à 1.

Ψ_1 est l'application de période 2π telle que $\Psi_1(x) = \dfrac{x-\pi}{2\pi}$ si $x \in [0,2\pi[$.

Si , pour $n \geq 1$, Ψ_n est définie, on pose pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi_{n+1}(x) = \frac{n+1}{2\pi}\left(\int_0^x \Psi_n(u)\, du - K_n\right) \text{ où } K_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2\pi - u)\Psi_n(u)\, du.$$

Question 1

a. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, Ψ_n est une fonction C^∞ par morceaux sur **R** et que, si $n \geq 2$, Ψ_n est de classe C^{n-2}.

b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\int_0^{2\pi} \Psi_n(u)\, du = 0$ et en déduire que pour tout $n \geq 2$, Ψ_n est de période 2π.

Question 2

a. Calculer les coefficients de Fourier $c_k(\Psi_1)$ de Ψ_1 pour $k \in \mathbf{Z}$.
b. En déduire les coefficients de Fourier $c_k(\Psi_n)$ de Ψ_n pour $n \geq 2$ et $k \in \mathbf{Z}$.
c. Montrer que, pour $n \geq 2$, la fonction Ψ_n a la parité de n.

Question 3

a. Montrer que si $n \geq 2$, la série de Fourier de Ψ_n converge uniformément sur **R** vers Ψ_n.
b. Que peut on dire de la série de Fourier de Ψ_1?

On définit, pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$, $\Phi_n(t) = \Psi_n(2\pi t)$ et $b_n = \Psi_n(0) = \Phi_n(0)$.
On remarquera que Φ_n est de période 1.

Question 4

a. Montrer que, pour $n > 0$, $b_{2n+1} = 0$.

b. Calculer les nombres b_0, b_1 et b_2.

c. Montrer, en utilisant la question 3 que

$$\forall t \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N},\ |\Phi_{2n+1}(t)| \leq \frac{2n+1}{2}|b_{2n}|.$$

Question 5

a. Soit g une application de classe C^∞ définie sur le segment [0,1].

On pose $I_n = \int_0^1 \Phi_n(t)\, g^{(n)}(t)\, dt \quad (n \in \mathbf{N})$.

Pour $n \geq 1$, exprimer I_{2n+1} en fonction de I_{2n-1}, puis en fonction de I_1 et enfin en fonction de I_0.

b. Soit f une application de classe C^∞ définie sur un segment [a,b].

Déduire de la question précédente la formule suivante

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \sum_{k=1}^{n}(b-a)^{2k}\frac{b_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) + R_n \text{ où}$$

$$R_n = -\frac{(b-a)^{2n+2}}{(2n+1)!}\int_0^1 \Phi_{2n+1}(t) f^{(2n+1)}(a + (b-a)t)dt\ .$$

Question 6

a. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(\Gamma(x))$.

On admettra sans démonstration que, pour tout entier n, la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de f garde un signe constant.

En appliquant la formule obtenue à la question 5. b. à la restriction de f à [x,x+1], montrer l'existence d'une constante A et, pour tout $n > 0$, d'une fonction ε_n définie sur $]0,+\infty[$ telles que :

$\varepsilon_n(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ et

$$f(x) = x(\ln x - 1) - \frac{1}{2}\ln x + A + \sum_{k=1}^{n}\frac{b_{2k}}{2k(2k-1)}\frac{1}{x^{2k-1}} + \frac{1}{x^{2n-1}}\varepsilon_n(x).$$

b. En déduire l'existence d'une fonction $\varepsilon(x)$ telle que :

$\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ et

$$\Gamma(x) = \frac{\exp A}{\sqrt{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)\right)$$ où a,b et c sont trois constantes que l'on déterminera.

c. Déterminer la valeur de A.

DEUXIEME PROBLEME : Algèbre

Dans tout le problème E désigne un espace euclidien de dimension n, $n \geq 1$, et l'on note:

- (|) un produit scalaire défini sur E, $\|\ \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Si m est un entier naturel non nul, on note:

- $M_{m,1}(\boldsymbol{R})$, l'ensemble des matrices colonnes à m lignes à coefficients réels.
- Si $X \in M_{m,1}(\boldsymbol{R})$, $\|X\|_2 = \sqrt{{}^tX.X}$ et $S_m = \{ X \in M_{m,1}(\boldsymbol{R}) / \|X\|_2 = 1 \}$.
- $M_m(\boldsymbol{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre m à coefficients réels et $O_m(\boldsymbol{R})$, le sous ensemble de $M_m(\boldsymbol{R})$, des matrices orthogonales.
- Si $M \in M_m(\boldsymbol{R})$, $\|M\|_2 = \sup_{X \in S_m} \|M.X\|_2$.

- Si $M \in M_m(\boldsymbol{R})$, on note $Sp(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres et pour $\lambda \in Sp(M)$, $E(\lambda, M)$ le sous espace propre correspondant.

Les résultats généraux, établis dans la partie 1 dans un cadre matriciel, seront utilisés par la suite, pour définir une notion d'angle entre deux sous espaces vectoriels et démontrer quelques propriétés de cette notion.

Partie 1

- Soit $B \in M_m(\boldsymbol{R})$. On pose $A = ({}^t B).B$.

Question 1.

Montrer qu'il existe $T \in O_m(\mathbf{R})$ **telle que** $({}^t T).A.T$ soit une matrice diagonale.

- On pose $A^{\#} = B.({}^t B)$. On note de plus Φ, l'endomorphisme de $M_{m,1}(\boldsymbol{R})$, défini par:

$$\forall\, X \in M_{m,1}(\boldsymbol{R}),\ \Phi(X) = B.X.$$

Question 2.

Soit λ une valeur propre non nulle de A.

a) Montrer que $Ker(\Phi) \cap E(\lambda, A)$ est réduit à la matrice colonne nulle.

b) Etablir simultanément que λ est une valeur propre de $A^{\#}$ et que $\Phi\big(E(\lambda, A)\big) \subset E(\lambda, A^{\#})$.

c) En déduire que $\dim\big(E(\lambda, A)\big) = \dim\big(E(\lambda, A^{\#})\big)$.

Question 3.

Démontrer, en utilisant les questions 1 et 2, que A et $A^{\#}$ sont semblables.

Question 4.

On suppose, de plus, que $\|B\|_2 \leq 1$. Soit λ, une valeur propre de A et, $X \in E(\lambda, A)$.

a) Calculer $\|B.X\|_2^2$ en fonction de λ et de $\|X\|_2$.

b) En déduire que $\lambda \in [0, 1]$.

Partie 2

- F et G sont deux sous espaces vectoriels de E, de dimension m, non nulle.
- On appelle p_F le projecteur orthogonal sur F et π_F l'unique application linéaire de G dans F qui coïncide avec p_F sur G. On définit de même p_G et, π_G application linéaire de F dans G.
- Soient $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_m)$ et $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_m)$ des bases orthonormées de F et de G respectivement. On note $B_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\pi_F)$, matrice de π_F dans les bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$.

Question 1.

Montrer que : $B_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = ((u_i|v_j))_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq m}$. En déduire que: $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(\pi_G \circ \pi_F) = ({}^t B_{\mathcal{U},\mathcal{V}}).B_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$.

Question 2.

Soit x un élément de G et X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{V}$ de G.

a) Etablir l'égalité suivante: $\|B_{\mathcal{U},\mathcal{V}}.X\|_2 = \|p_F(x)\|$.

b) En déduire que : $\|B_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\|_2 \leq 1$.

Question 3.

En utilisant la partie 1, en conclure qu'il existe:

a) une base orthonormée $\mathcal{W}$ de G,

b) un unique m uplet $(t_1, ..., t_m)$ appartenant à $\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)^m$, avec $t_1 \leq ... \leq t_m$,

tels que: $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}(\pi_G \circ \pi_F) = \begin{bmatrix} \cos^2(t_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \cos^2(t_m) \end{bmatrix}$.

Montrer que le m uplet $(t_1, ..., t_m)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{W}$.

- On peut alors définir l'angle du couple (F,G) par: $\mathcal{Angle}(F,G) = (t_1, ..., t_m)$.

Question 4.

Exemples : $E = \mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique.

a) F et G sont les droites vectorielles engendrées respectivement par les vecteurs (1,1,0) et (1,0,1). Déterminer $\mathcal{Angle}(F,G)$.

b) $F = \{(x,y,z) \in E \,/\, y = 0\}$, $G = \{(x,y,z) \in E \,/\, y - z = 0\}$.

Déterminer $\mathcal{Angle}(F,G)$ et $\mathcal{Angle}(F^\perp, G^\perp)$.

Question 5.

En utilisant la partie 1 établir que $\mathcal{Angle}(F,G) = \mathcal{Angle}(G,F)$.

Question 6.

Montrer que: $\forall x \in G$, $(x \mid (\pi_G \circ \pi_F)(x)) = \|p_F(x)\|^2$. (on pourra utiliser la question 2.a).)

Question 7.

On note r le nombre de composantes de $\mathcal{Angle}(F,G)$ égales à 0.

a) Etablir que: $\forall x \in G$, $\|p_F(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow x \in F$.

b) En déduire, en utilisant la question 6, que: $r = \dim(F \cap G)$. Que peut-on en conclure lorsque $r = m$?

Question 8.

On note s le nombre de composantes de $\mathcal{Angle}(F,G)$ égales à $\frac{\pi}{2}$. En utilisant la question 6, montrer que:

$s = \dim(F^\perp \cap G)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail